Pisemny egzamin dojrzałości z matematyki

licea ogólnokształcące o profilach matematycznym UJ i matematyczno-fizycznym oraz klasy autorskie realizujące rozszerzony program nauczania matematyki

Termin: 12 maja 2004 r. Godzina: 9^{00}

ZESTAW M I

INSTRUKCJA DLA ZDAJĄCEGO

1. Należy rozwiązać trzy zadania spośród pięciu. Na pierwszej stronie czystopisu należy podać numery wybranych zadań, pisząc: *„Do oceny przedstawiam rozwiązania zadań o numerach ...”*
2. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań to pięć godzin zegarowych.
3. Rozwiązując zadania, należy wykonać i zapisać wszystkie niezbędne etapy rozwiązania, starając się o ich odpowiednie skomentowanie. W szczególności istotne jest podsumowanie poszczególnych etapów rozwiązania zadania i udzielenie końcowej odpowiedzi, dotyczącej rozwiązywanego problemu.
4. Należy dbać o czytelność pracy. Nie można stosować korektorów. Nie można używać kolorów zielonego (stosuje go Komisja odbierająca pracę) i czerwonego (stosuje go egzaminator oceniający pracę).
5. Wszystkie istotne obliczenia i rysunki powinny się znaleźć w czystopisie. Zdający, który nie zdąży przepisać kompletnego rozwiązania do czystopisu, powinien wskazać ten fragment brudnopisu, który ma być poddany ocenie. Odpowiednią kartkę brudnopisu dołącza się do czystopisu. Pozostałą część brudnopisu odłącza się od pracy i nie uwzględnia przy jej ocenie.
6. Zdający może korzystać z przygotowanych przez Komisję Egzaminacyjną tablic matematycznych. Może też posłużyć się kalkulatorem. W czasie egzaminu nie można korzystać z kalkulatorów graficznych.
7. Przy temacie każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą można uzyskać za jego poprawne rozwiązanie (8, 10 lub 12 punktów).
8. Warunkiem koniecznym dla uzyskania pozytywnej oceny z pisemnego egzaminu dojrzałości z matematyki jest uzyskanie za rozwiązanie jednego zadania co najmniej 7 punktów przy łącznej sumie punktów (za rozwiązanie trzech zadań) nie mniejszej niż 12. Przy ustalaniu wyniku egzaminu stosuje się poniższą tabelę:

Ocena	Liczba punktów
niedostateczny	0 — 11
dopuszczający	12 — 15
dostateczny	16 — 21
dobry	22 — 26
bardzo dobry	27 — 30
celujący	31 — 32

Zadanie 1 *(8 punktów)*

Dane jest równanie $(m+1)x^2+(m+1)x+1=0$ z niewiadomą x i parametrem $m\in R$.

a. Zbadaj liczbę rzeczywistych rozwiązań danego równania w zależności od wartości parametru m.

b. Naszkicuj wykres funkcji f, gdzie

$$f(m)=\begin{cases} -2(x_1+x_2) & \text{gdy dane równanie ma 2 różne rozwiązania rzeczywiste } x_1,\ x_2 \\ -2x_0+m & \text{gdy dane równanie ma jedno rozwiązanie rzeczywiste } x_0 \\ \left|\frac{1}{3}m\right| & \text{gdy dane równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych} \end{cases}$$

Zadanie 2 *(10 punktów)*

Dana jest funkcja:

$$f(x)=x+4+\frac{x+4}{x+1}+\frac{x+4}{(x+1)^2}+\frac{x+4}{(x+1)^3}+\ldots \text{ (suma nieskończonego ciągu geometrycznego)}$$

a. Wyznacz dziedzinę funkcji f i podaj jej wzór.

b. Prosta l jest asymptotą pionową prawostronną, a prosta k asymptotą ukośną wykresu funkcji f. Oblicz pole trójkąta ABC wyznaczonego przez proste l, k i prostą m o równaniu $m: y=-2x$.

Zadanie 3 *(10 punktów)*

Środek S okręgu O należy do prostej l o równaniu $x-y+2=0$. Punkty $A=(3,0)$ i $B=(-1,2)$ należą do tego okręgu.

a. Wyznacz równanie okręgu O.

b. Wyznacz współrzędne takiego punktu C należącego do okręgu O, że $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$.

c. Wyznacz równania stycznych k i m do okręgu O takich, że $B\in k$ i $A\in m$ oraz oblicz tangens jednego z kątów, pod jakim przecinają się te styczne.

Zadanie 4 *(10 punktów)*

W urnie U_1 jest pięć żetonów o numerach od 1 do 5. W urnie U_2 są cztery żetony o numerach od 1 do 4. Rzucamy dwukrotnie symetryczną monetą. Gdy dwa razy wypadnie reszka to wybieramy urnę U_1, w przeciwnym przypadku urnę U_2. Z wybranej w ten sposób urny losujemy kolejno, ze zwracaniem dwa żetony. Numer pierwszego to cyfra dziesiątek, numer drugiego – cyfra jedności dwucyfrowej liczby x.

a. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
   A – liczba x jest większa niż 35,
   B – liczba x jest podzielna przez 6.

b. Wiedząc, że liczba x jest większa od 35, wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   C – liczbę x utworzono z numerów żetonów wylosowanych z urny U_1.

Zadanie 5 *(12 punktów)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S, krawędź podstawy ma długość równą a, zaś wysokość ostrosłupa ma długość równą h. W ostrosłup $ABCDS$ wpisano sześcian tak, że cztery wierzchołki sześcianu należą do krawędzi bocznych ostrosłupa, a pozostałe cztery należą do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

a. Wyznacz stosunek f objętości ostrosłupa do objętości sześcianu w zależności od a i h.

b. Niech $\frac{h}{a}=x$. Podaj wzór funkcji f w zależności od x, określ dziedzinę oraz wyznacz ekstremum tej funkcji.