Wariant I

Zadanie 1.

Dana jest funkcja $f(x) = x - 3$.

a) Rozwiązać równanie $|x-5| \cdot \log_2 f(x) = 2x - 10$.

b) Rozwiązać nierówność $\log_{f(x)}\left(\frac{x-2}{x-6}\right) \geq 1$.

c) Wyznaczyć wszystkie wartości parametru *k,* dla których równanie $|f(x)-4| = k^2 - 3k - 2$ ma dwa pierwiastki różnych znaków.

Punktacja: a – 4, b – 5, c – 6

Zadanie 2.

Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem postaci: $a_n = \frac{3 - p \cdot n}{(p-3) \cdot n + 1}$, $n \in N^+$, $p \in R$.

a) Wyznaczyć wszystkie wartości parametru *p,* dla których granicą ciągu (a_n) jest liczba *p*.

b) Dla $p = 3$ wyznaczyć wszystkie wartości *n,* dla których suma *n* początkowych, kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest większa od (-2004) .

c) Wyznaczyć ciąg (a_n) dla $p = 4$. Korzystając tylko z definicji granicy wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -4$.

Punktacja: a – 4, b – 5, c – 6

Zadanie 3.

Dana jest funkcja $f(x) = \sin x$.

a) Wyznaczyć wszystkie pierwiastki równania $\frac{1}{2} \cdot f(2x) - \cos x = 0$ należące do przedziału $\langle 0; 10 \rangle$.

b) W przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ rozwiązać nierówność $\cos^2 x + f(x) \cdot |f(x)| < \frac{1}{2}$.

c) Wyznaczyć wszystkie wartości parametru *p,* dla których istnieje rozwiązanie równania $f^2(x) + f(x) + p = 0$.

Punktacja: a – 4, b – 5, c – 6

Zadanie 4.

W układzie współrzędnych jest dany punkt $A(4,2)$.

a) Wyznaczyć równanie tej cięciwy okręgu o równaniu $x^2+y^2-12x-6y+20=0$, której punkt A jest środkiem.

b) Wyznaczyć równanie okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych i przechodzącego przez punkt A.

c) Punkt A jest wierzchołkiem rombu $ABCD$, którego jeden z boków zawiera się w prostej o równaniu $x-2y=0$. Wiedząc, że środkiem symetrii rombu $ABCD$ jest punkt $S(7,6)$, obliczyć pole oraz kosinus kąta rozwartego tego rombu.

Punktacja: a – 4, b – 5, c – 6

Zadanie 5.

Dany jest stożek obrotowy.

a) Przekrój osiowy danego stożka jest trójkątem, w którym kąt przy podstawie ma miarę α, a pole równa się P. Wyznaczyć pole powierzchni całkowitej tego stożka.

b) Stosunek pola powierzchni bocznej danego stożka do jego powierzchni całkowitej jest dany i równa się s. Obliczyć sinus kąta między wysokością stożka a jego tworzącą. Zbadać, dla jakich wartości s są spełnione warunki zadania.

c) Dany stożek wpisano w kulę o promieniu R. Wyznaczyć wymiary stożka o możliwie największej objętości.

Punktacja: a – 4, b – 5, c – 6

Do rozwiązania należy wybrać trzy spośród pięciu zadań.
Aby otrzymać pozytywną ocenę, należy uzyskać co najmniej 16 punktów, w tym poprawnie rozwiązać dwa dowolne podpunkty z wybranych zadań.

Kryteria ocen:

celujący:	44 – 45 pkt.
bardzo dobry:	41 – 43 pkt.
dobry:	33 – 40 pkt.
dostateczny:	23 – 32 pkt.
dopuszczający:	16 – 22 pkt.
niedostateczny:	0 – 15 pkt.